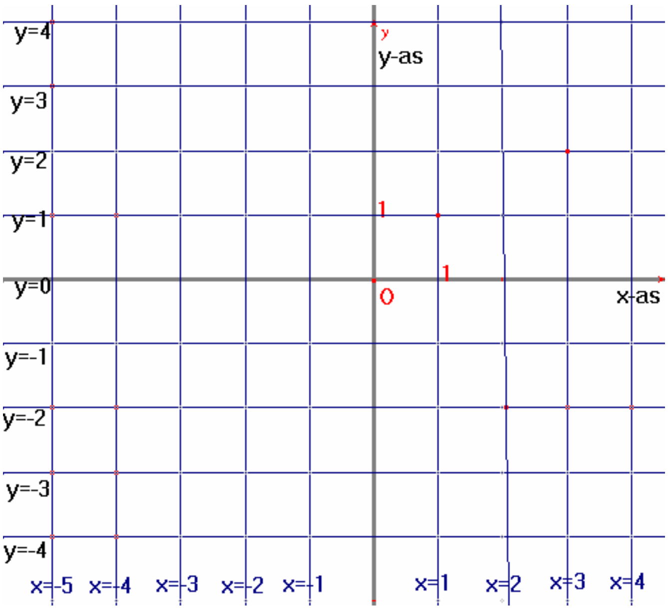
Hoofdstuk 1 Introductie van de Analytische meetkunde.

§ 1.1 Inleiding

Het schatgraversprobleem.
Op een eiland is een schat te vinden via de volgende aanwijzingen: loop in een rechte lijn van de oude eik naar de grote zwerfkei. Leg nu loodrecht op de vorige richting eenzelfde afstand af. Loop vervolgens in een rechte lijn naar de tweede grote zwerfkei die op het eiland te vinden is. Leg vervolgens weer de laatste afstand af in de richting loodrecht op het laatst afgelegde stuk. De schat ligt precies op het midden van het lijnstuk tussen het punt dat je net bereikt hebt en de oude eik.
Echter: bij het op zoek gaan naar de schat blijkt dat er op het hele eiland geen eik meer te vinden is. Alleen de twee grote zwerfkeien zijn er nog. Toch kan met slechts één keer graven de schat gevonden worden.

Op het einde van het hoofdstuk kun jij dat ook!

§ 1.2 Cartesisch assenstelsel



Je ziet hierboven een plaatje van een *cartesisch assenstelsel Oxy*. Zo'n assenstelsel voldoet aan de volgende eisen:

– *de beide coördinaatassen staan loodrecht op elkaar* (daar kijk je niet van op),
– *de beide lengte-eenheden op de assen zijn even lang* (men spreekt wel van een vierkant assenstelsel; denk aan 'Zsquare', optie van de GR),
– *de oriëntatie van het stelsel is positief* (dat betekent: de draaiing om O in positieve richting over 90^{o} brengt de x^+-as naar de y^+-as

Meetkundige begrippen zoals 'punt', 'rechte lijn', 'afstand', 'loodrecht', 'cirkel', 'rechthoekig gebied', 'hyperbool', ..., krijgen ten opzichte van zo'n assenstelsel een zogenaamde *analytische voorstelling*. Zo'n voorstelling kan zijn een vergelijking, een formule, een ongelijkheid, een parametervoorstelling of een combinatie van deze vormen. In dit hoofdstuk ga je analytische voorstellingen leren en gebruiken.

Het 'vierkante' karakter van een cartesisch assenstelsel komt mooi tot uiting als je de *roosterlijnen* tekent (zoals hierboven). De *verticale* roosterlijnen worden analytisch voorgesteld door een vergelijking van de vorm $x = k$ (met $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3$, enzovoort).De *horizontale* roosterlijnen worden analytisch voorgesteld door een vergelijking van de vorm $y = k$ (met $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3$, enzovoort).Het snijpunt van een horizontale en een verticale roosterlijn is een *roosterpunt*.

In de figuur hierboven zie je de roosterpunten P (snijpunt van $x = 1$ en $y = 1$) en Q (snijpunt van $x = 3$ en $y = 2$).We schrijven kortweg: P: (1 , 1) en Q: (3 , 2).

1. a. Verklaar dat geldt: $d(Q,P)=\sqrt{5}$.
   b. Er zijn in totaal acht roosterpunten met de afstand $\sqrt{5}$ tot Q. Geef de coördinaten van de andere zeven
2. Het midden M van het lijnstuk PQ is geen roosterpunt.

   a. Wat zijn de coördinaten van M

   b. Wat zijn de coördinaten van het punt dat precies in het midden tussen de punten (10 , 8) en (6 , 20) ligt?

   c. Bedenk een algemene regel hoe je bij twee gegeven punten de coördinaten van het midden kunt vinden.

3 Gegeven zijn de punten A: (2 , 17) en M: (3 , 13). M is het midden van lijnstuk AB. Bereken de coördinaten van het punt B.

4 De punten P en Q worden respectievelijk voorgesteld door (3 , 5) en (4 , 12).

a. Hoe groot is de afstand van P tot de lijn $x = 10$? En tot de lijn $x = -10$?

b. Dezelfde vraag voor Q en de lijnen $y = 25$ en $y = -8$

5. Laat P het punt (x_P , y_P) zijn. We willen de afstand van P tot de lijn l: $x = 4$ uitdrukken in de coördinaten van P.
   a. Waarom speelt y_P daarbij geen rol?
   b. Je kunt drie gevallen onderscheiden:
      1. $x_P > 4$, dan d(P, l) = ...
      2. $x_P = 4$, dan d(P, l) = ...
      3. $x_P < 4$, dan d(P, l) = ...

6. Je kunt de drie gevallen van 5b onder één hoedje vangen met behulp van de absolute waarde.

$$\text{d}(P,l) = |x_P - 4|$$

Bedenk zelf een formule voor de afstand van P tot de lijn k: $y = 3$

7. Noem S het snijpunt van de lijnen l en k uit 5 en 6. Voor de afstand d(P,S) geldt:

$$\text{d}(P,S) = \sqrt{|x_P - 4|^2 + |y_P - 3|^2}$$

Verklaar deze formule.

Opmerking: omdat in de formule kwadraten staan, kun je de absoluut-strepen ook weglaten. Een kwadraat kan immers niet negatief zijn! Je krijgt dan:

$$\text{d}(PS) = \sqrt{(x_P - 4)^2 + (y_P - 3)^2} \text{ ,}$$

Nog wat algemener: als P de coördinaten (x_P , y_P) heeft en Q de coördinaten (x_Q , y_Q), dan

$$\text{d}(P,Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

8 Bereken met deze formule de afstand tussen de punten (-5 , 11) en (3 , - 4). Ook van: (49 , 37) en (-50 , 17) en van (115 , 88) en (120 , 88).

9 Wat gebeurt er met de afstand van (x_P , y_P) en (x_Q , y_Q) als je deze vier coördinaten verdubbelt? Teken ook een plaatje om je antwoord te verklaren.

10 De verzameling punten (x , y) waarvan de y-coördinaat voldoet aan $|y-5| \leq 1$ vormen een gebied Hoe ziet dat gebied eruit?

11 Van een rechthoekig gebied is de analytische voorstelling: $-2 \leq x \leq 4$ én $-1 \leq y \leq 3$

a. Hoe ziet dat gebied eruit?

b. Geef een analytische voorstelling van het gebied met absolute waarden.

12 Van ΔABC zijn gegeven de hoekpunten $A(-1,4)$, $B(2,3)$ en $C(10,7)$. Bepaal de lengte van de zwaartelijn uit A.

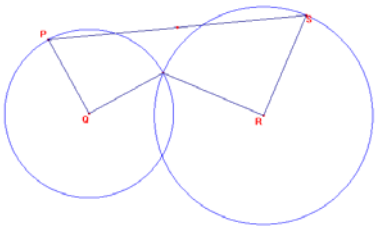
13 Men heeft de punten P(5,10) en Q(-10, 5). Het punt N ligt op lijnstuk PQ zodat PN : NQ=3:2. Bereken de coördinaten van N

14 Men heeft de punten $P(x_1,y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$. Het punt N ligt op lijnstuk PQ zodat PN : NQ=3:2. Druk de coördinaten van N uit in die van Pen Q.

§1.3 Assenstelsel kiezen

In deze paragraaf zul je zien dat door de keuze van een geschikt assenstelsel meetkundige problemen vaak eenvoudig opgelost kunnen worden.

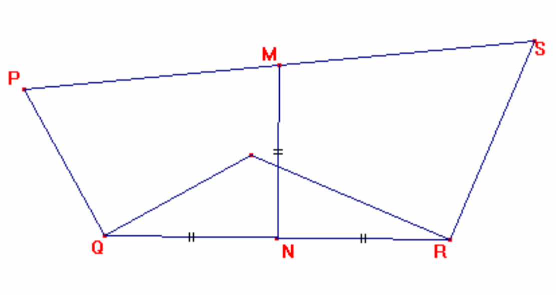
Terug naar het schatgraversprobleem



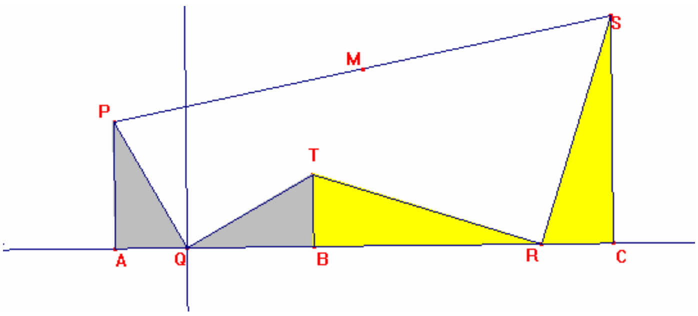
- *Ontwikkel eerst met Cabri een vermoeden van de vindplaats van de schat.*
- *Bewijs nu je vermoeden.*

Oplossing: We kunnen dus ervan uitgaan dat de stenen, die we Q en R noemen er nog steeds liggen. Dit worden dus onze vaste punten. We gaan nu wat variëren met de plaats P, waar de eik zou hebben gestaan.
Bij het verslepen van punt P blijkt het midden van PS niet van plaats te veranderen. We weten nu in ieder geval waar de schat ligt.
Wiskundigen willen natuurlijk graag bewijzen dat het punt vast ligt en waar dat dan wel ligt als je alleen Q en R weet.

Het invoeren van een geschikt assenstelsel brengt ons de oplossing
Namelijk: neem het midden N van QR, loodlijn op QR door dit midden. Op deze lijn ligt de



schat en wel zo dat MN=QR/2



Bewijs:
Voer een assenstelsel in: de x-as langs QR en de oorsprong in Q. Stel de lengte van RQ is a en $P(p,q)$
Omdat $\Delta PAQ \cong \Delta QBT$ en $\Delta BRT \cong \Delta CSR$ geldt:
$QB=q$ en dus $BR = a-q$ en $TB = -p$ dus $S(a+-p, a-q)$

- het midden van lijnstuk PS heeft dus als coordinaten: $\left(\dfrac{p+a-p}{2}, \dfrac{q+a-q}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$

omdat a vast ligt , ligt punt ook vast en is gemakkelijk te construeren.

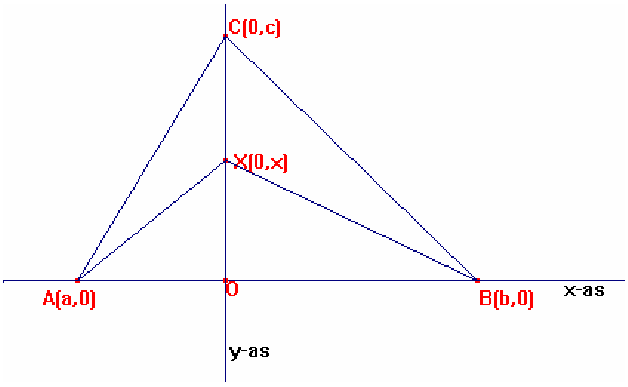
Het invoeren van een assenstelsel heeft ons dus geholpen met het vinden van de oplossing.
Zo'n combinatie van meetkunde in een assenstelsel noemen we analytische meetkunde.

Nog een voorbeeld:

Gegeven is driehoek ABC en een willekeurig punt X op de hoogtelijn uit C .

Bewijs: $|AX|^2 - |BX|^2 = |AC|^2 - |BC^2|$

Oplossing met analytische meetkunde:
Kies de x-as door A en B en de y-as door de hoogtelijn uit C.



$$|AX|^2 - |BX|^2 = (x-0)^2 + (0-a)^2 - ((x-0)^2 + (0-b)^2 = a^2 - b^2$$

$$|AC|^2 - |BC^2| = (c-0)^2 + (0-a)^2 - ((c-0)^2 + (0-b)^2 = a^2 - b^2$$

- De afstandformule is gebaseerd op de stelling van Pythagoras. Ga na dat in dit geval het bewijs ook eenvoudig met de stelling van Pythagoras te geven is.

§ 1.4 Het begrip vergelijking

We bestuderen een vergelijking met twee onbekenden erin bijvoorbeeld: $x^2 + y^2 = 25$.
Willekeurig gekozen waarden van x en y voldoen natuurlijk in het algemeen niet aan deze vergelijking. Toch heeft deze vergelijking oneindig veel oplossingen . Immers we kunnen een waarde van x kiezen en daarna uitrekenen hoe groot y dan moet zijn.

- Neem $x=3$ en bereken y, neem $y=3$ en bereken x, neem $x=2$ en bereken y.

Er zijn dus oneindig veel getallenparen voor x en y die aan deze vergelijking voldoen. Stellen nu x en y de coördinaten van een punt voor dan krijgen we zo oneindig veel punten. Al deze punten vormen samen de kromme K .

- Schets de kromme K
- Zoek uit op je GR hoe je de kromme K kunt tekenen met behulp van je GR
- Teken in het programma cabri een cirkel en maak de achterliggende vergelijking zichtbaar.

We krijgen dus de volgende definitie:
Onder de vergelijking van een kromme *K* verstaan we de betrekking waaraan de coördinaten van alle punten van deze lijn voldoen en de coördinaten van alle andere punten niet.

De verzameling van alle punten (x, y) die voldoen aan de vergelijking $x^2 + y^2 = 25$ is een cirkel met middelpunt (0,0) en straal 5. In wiskundetaal noteer je dit als volgt:

$K = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 25\} = \odot(O,5)$.

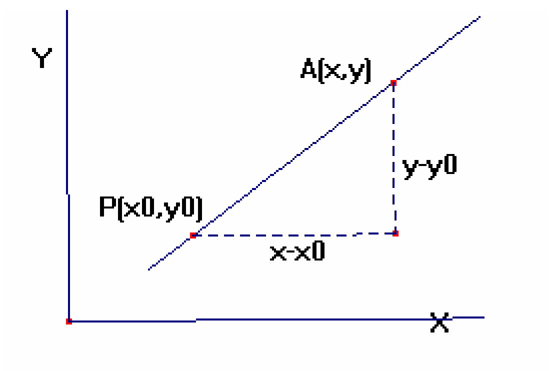
NB. De grafiek van de kromme *K* kan ook een rechte lijn zijn. bijvoorbeeld $K = \{(x,y) | 2x + 3y = 6\}$

Opgaven

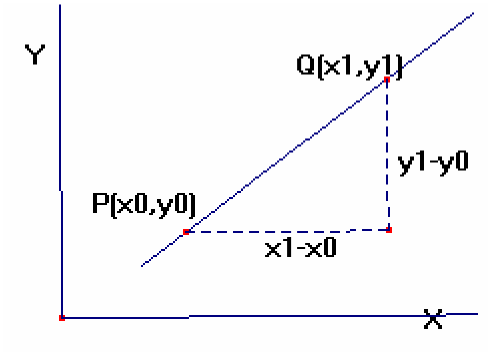
1. Schets de kromme *K* met vergelijking $x^2 y + y = 5$ door resp. voor $x=0$, $x= \pm 1$, $x= \pm 2$, en $x= \pm 3$ de bijbehorende waarden van *y* uit te rekenen.
2. Het punt (2,3) ligt op de kromme met vergelijking $x^3 - pxy^2 + 5px + 7y + 3 = 0$. Bereken *p*
3. Toon aan dat de kromme met vergelijking $2x^2 + 3xy + 5y^2 = 7$ puntsymmetrisch is t.o.v. *O*
4. Als het punt (p,q) op de kromme $2x^2 + 5y^2 = 7$ ligt , welke drie andere punten liggen daar dan ook op?
5. Het punt (p,q) ligt op de kromme $x^2 - xy + 1 = 0$ Bewijs dat het punt $\left(\frac{1}{p}, q\right)$ ook op die kromme ligt.

Hoofdstuk 2 Meer over lijnen

§ 2.1 Je weet dat $y = ax + b$ de vergelijking is van een rechte lijn. Hierin is *a* de richtingscoëfficiënt en het punt $(0,b)$ het snijpunt met de y-as.
In dit onderdeel van de wiskunde zul je ook vaak de vergelijking $y - y_0 = m(x - x_0)$ tegenkomen. Dit is een lijn met richtingscoëfficiënt *m*, die door het punt (x_0, y_0) gaat.



Als volgt in te zien:
In figuur 1 stelt $P(x_0, y_0)$ is het *vaste* punt voor en $A(x,y)$ een langs de lijn *lopend punt* op de lijn. De y-y_0 is de verplaatsing in de *y*-richting en de x-x_0 is de verplaatsing in de *x*-richting vanaf het vaste punt naar een willekeurig punt van de lijn. Er geldt dus:
$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$ en hieruit volgt $y - y_0 = m(x - x_0)$



Als er nu twee punten(x_0, y_0) en(x_1, y_1) van de lijn gegeven zijn kun je de volgende vergelijking gebruiken

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

- *Ga dit na met behulp van figuur 2*

Als de snijpunten met de *x*-as en de *y*-as gegeven zijn wordt vaak de volgende vergelijking gebruikt: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ Dit wordt wel de assen-vergelijking van een lijn genoemd

We hebben nu al vier mogelijkheden gehad om een vergelijking van een lijn op te stellen, maar niet <u>alle</u> lijnen kunnen met bovenstaande notaties aangeven worden.

- *Leg dit uit.*

Dit bezwaar kunnen we ondervangen door te noteren:
Een vergelijking van een rechte lijn is: $ax+by=c$ met $a,b,c\in\mathbb{R}$ en $a\neq 0\vee b\neq 0$

- *Ga dit na*

Nu geldt altijd: $(a=0\vee a\neq 0)\ \wedge(b=0\vee b\neq 0)\wedge(c=0\vee c\neq 0)$
We bekijken alle mogelijke combinaties van de waarden die *a*, *b* en *c* aan kunnen nemen en gaan na hoe de ligging van de lijn is. Bijvoorbeeld: als $a=0\wedge b\neq 0\wedge c\neq 0$ dan is de lijn horizontaal en gaat niet door de oorsprong.

- *Hoeveel mogelijkheden zijn er.*
- *Ga na hoe de ligging van de lijn is in elke combinatie.*

Opgaven

1. a. Bepaal een vergelijking van de lijn door de punten $(-3,5)$ en $(2,-3)$
b. De lijn door de punten $(-3,5)$ en $(2,-3)$ snijdt de *x*-as en de *y*-as. Bereken de coördinaten van die snijpunten
c. Onderzoek met een berekening of de volgende punten op één lijn liggen.
$(-3,5)$, $(2,-3)$ en $(\_3,3)$

2. Zeg van elk van de volgende vergelijkingen wat voor een stelsel lijnen erdoor wordt voorgesteld.
a. $y=3x+p$ b. $y=px+3$ c. $y-5=p(x-2)$ d. $3x=p$

3. Bepaal de vergelijking van de lijn door het punt (2,3) evenwijdig met de lijn 4x+5y-11=0

4. Teken $\left\{(x,y)\middle|y=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-4)^2}\right\}$

5. Onderzoek met een berekening of de volgende punten op één lijn liggen.
(2,3), (3,-1) en (0,6)

6. De lijn door de punten $(-3,5)$ en $(2,-3)$ snijdt de *x*-as en de *y*-as. Bereken de coördinaten van die snijpunten.

7. Gegeven is de vergelijking $2x+3y+1-(p^2+p)(x+y-1)=0$
Voor iedere waarde van *p* stelt deze vergelijking een lijn voor. De verzameling an deze lijnen wordt aangeduid met *V*

a. Hoeveel van deze lijnen gaan door (0,0)
b. Hoeveel van deze lijnen gaan door (1,1)
c. Bepaal de coördinaten van het punt waardoor al deze lijnen gaan.

8. Bepaal de vergelijking van een lijn die symmetrisch ligt met de lijn $y=mx+n$ t.o.v
a. de x-as b. de y-as c. de oorsprong.

§ 2.2 Ligging van twee lijnen ten opzichte van elkaar.

2.2.1 Twee lijnen in het platte vlak kunnen elkaar snijden, evenwijdig lopen of samenvallen.

- *Onderzoek de ligging van de volgende lijnen paren*

a. $\begin{cases} 3x+4y=11 \\ 6x-2y=2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ 4x+6y=21 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 6x-2y=2 \end{cases}$

We noemen het stelsel vergelijkingen onder a. *onafhankelijk*, het stelsel onder b. *strijdig* en het stelsel onder c. *afhankelijk*

Werk voortaan volgens de volgende methode:

$$\begin{cases} 3x+4y=11 \\ 6x-2y=2 \end{cases} \left|\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}\right| \rightarrow \begin{cases} 6x+8y=22 \\ 6x-2y=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10y=20 \\ 6x-2y=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2 \\ 6x=6 \end{cases}$$

Dus het snijpunt van de twee lijnen is: S(1,2)
Op bovenstaande manier hebben we x geëlimineerd.

- *Ga na hoe het rekenproces verloopt als je y elimineert.*

Als je deze schrijfwijze volgt kun je algemeen iets vertellen over de ligging van twee lijnen.

$$\begin{cases} ax+by=c \\ px+qy=r \end{cases} \left|\begin{matrix} q \\ b \end{matrix}\right| \rightarrow \begin{cases} aqx+bqy=cq \\ bpx+bqy=br \end{cases} \rightarrow (aq-bp)x=cq-br \Rightarrow x=\frac{cq-br}{aq-bp}$$

$$\begin{cases} ax+by=c \\ px+qy=r \end{cases} \left|\begin{matrix} p \\ a \end{matrix}\right| \rightarrow \begin{cases} apx+bpy=cp \\ apx+aqy=ar \end{cases} \rightarrow (bp-aq)y=cp-ar \Rightarrow y=\frac{cp-ar}{bp-aq}$$

Als $aq-bp \neq 0$ dan noemen we het stelsel onafhankelijk en de bijbehorende lijnen snijden elkaar.
Als $aq-bp=0 \wedge cq-br \neq 0$ dan noemen we het stelsel strijdig en de bijbehorende lijnen lopen evenwijdig
Als $aq-bp=0 \wedge cq-br=0$ dan noemen we het stelsel afhankelijk. De bijbehorende lijnen vallen dan samen.
Als $a,b,c,p,q,$en r ongelijk aan 0 zijn volgt hieruit regel:

Het stelsel $\begin{cases} ax+by=c \\ px+qy=r \end{cases}$ is

onafhankelijk als geldt: $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$ (meetkundige interpretatie: snijdende lijnen)

strijdig als geldt: $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$ (meetkundige interpretatie: evenwijdige lijnen)

afhankelijk als geldt: $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ (meetkundige interpretatie: samenvallende lijnen)

Opgaven

1. Onderzoek de ligging van de volgende lijnenparen.

d. $\begin{cases} -6x+4y=5 \\ 9x-6y=10 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 4x-3y=1 \\ 2x-6y=2 \end{cases}$

f. $\begin{cases} y=2x+6 \\ 6x-3y=18 \end{cases}$

2. De lijnen $px+(2p-1)y+4=0$ en $(p+3)x+2py+6=0$ zijn evenwijdig. Bereken *p*.

3. De lijnen $(p-1)x+(q-1)y=3$ en $qx+(2p+1)y=5$ vallen samen . Bereken *p* en ***q*.**

4. Gegeven zijn de punten *P*(2,3) en *Q*(4,9). Men trekt door *P* en *Q* twee evenwijdige lijnen die de *x*-as in *S* en *T* snijden. Als gegeven is dat *ST*=4 bepaal dan de vergelijkingen van die evenwijdige lijnen.

5. Het volgende stelsel heeft geen oplossing . Bereken *a*.

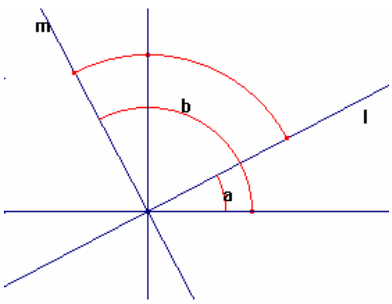
$$\begin{cases} 2x+ay=6 \\ ax+8y=12 \end{cases}$$

6. Voor welke waarden van *a* en *b* heeft het stelsel $\begin{cases} 3x+ay=b \\ ax+3y=b \end{cases}$

a. geen oplossing?
b. één oplossing
c. oneindig veel oplossingen?

2.2.2 Wanneer staan twee lijnen loodrecht op elkaar?

Stel de lijnen $l: y=m_1x$ en $k: y=m_2x$ staan loodrecht op elkaar.
Zie figuur1



Dan geldt $m_1 = \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

en

$$m_2 = \tan(\alpha+\tfrac{1}{2}\pi) =$$

$$\frac{\sin(\alpha+\frac{1}{2}\pi)}{\cos(\alpha+\frac{1}{2}\pi)} = \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi-\alpha)}{-\cos(\frac{1}{2}\pi-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}$$

Ofwel: $m_1 \cdot m_2 = -1$

Omgekeerd: Als voor de lijnen $l: y=m_1x$ en $k: y=m_2x$ geldt: $m_1 \cdot m_2 = -1$ dan staan ze loodrecht op elkaar. Immers

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{\sin\alpha}{\cos a} \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = -1 \rightarrow$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta = 0 \rightarrow \quad \cos(\alpha-\beta)=0 \rightarrow \alpha-\beta=\tfrac{1}{2}\pi \vee \beta-\alpha=\tfrac{1}{2}\pi$$

En hieruit volgt dat de lijnen loodrecht op elkaar staan.

Opgaven

1. Van de rechthoek *ABCD* zijn gegeven de punten *A*(2,6) en *B*(2,5), terwijl het hoekpunt op de lijn 3*x* - 4*y* = 2 ligt. Bepaal de coördinaten van *D*.

2. Van ΔABC zijn gegeven de hoekpunten A(2,6) en B(2,5) en C(3,-1). Bereken de oppervlakte van ΔABC.

3. Op de lijn $5x-3y = 7$ ligt een punt P dat even ver ligt van de punten A(1,4) en B(3,10). Bereken de coördinaten van P.

4. Van de gelijkbenige driehoek ABC zijn gegeven de hoekpunten A(3,2) en C(7,14). De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{1}{2}$. Bepaal de coördinaten van B

5. Bepaal de algemene vergelijking van een lijn die loodrecht staat op de lijn $2x+3y-5=0$

6. Bewijs dat de hoogtelijnen van een driehoek door hetzelfde punt gaan.

7. Bepaal een vergelijking van de lijn door het punt (2,4) loodrecht op de lijn door de punten (3,1) en (5,7)

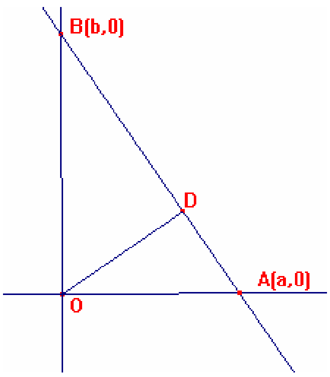
8. Onder welke voorwaarden staan de lijnen $a_1x+b_1y+c_1=0$ en $a_2x+b_2y+c_2=0$ loodrecht op elkaar?

9. Van driehoek ABC waarvan $AC=BC$ en $\angle ACB = 90^0$ zijn gegeven de hoekpunten A(1,1), B(5,3). De driehoek ligt geheel in het eerste kwadrant. Bereken de coördinaten van hoekpunt C.

10. Op de lijn $y = x$ ligt een punt P zodanig dat $\angle APB = 90^0$. Bepaal de coördinaten van het punt P.

§ 2.3 De afstand tussen een punt en een lijn.

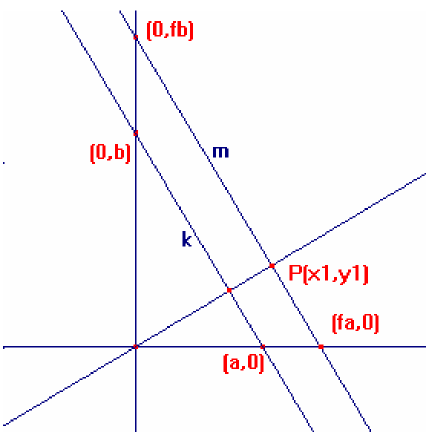
Laat k een rechte lijn zijn die niet door O gaat en die de x-as snijdt in (a, 0) en de y-as in (b, 0).



De oppervlakte van driehoek OAB kun je op twee manieren berekenen: Opp $\Delta OAB = \frac{1}{2}OA\times OB = \frac{1}{2}AB\times OD$. Hieruit volgt dan: $|ab| = |OD|\sqrt{a^2+b^2}$ en dus

De afstand van de oorsprong O tot de lijn k is gelijk aan:

$$\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



De lijn k heeft als vergelijking: $bx+ay=ab$. We willen weten wat de algemene formule is van de afstand van een willekeurig punt (x_1, y_1) tot de lijn.

Aanpak: bekijk de lijn m door (x_1, y_1) evenwijdig met k. Bereken de afstand van O tot k en de afstand van O tot k. Het verschil is de gevraagde afstand.

De lijn *m* heeft als vergelijking: $bx+ay=fab$ en we weten dus $bx_1+ay_1=fab$

$d(O,m)=\dfrac{fab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ zodat

$d(P,k)=\dfrac{fab-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{bx_1+ay_1-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Bij een andere ligging van de lijn *k* en/of punt *P* krijg je de formule $\dfrac{ab-bx_1-ay_1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ omdat een afstand altijd positief is.

- Ga dit na voor het punt P(1,1) en de lijn 4x+3y=12

Algemeen:

$d(P,k)=\dfrac{|bx_1+ay_1-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Opgaven

1. Bepaal de afstand tussen de evenwijdige lijnen $3x+4y+8=0$ en $3x+4y-12=0$

2. Bepaal de vergelijking van de middenparallel van de evenwijdige lijnen $3x+4y+8=0$ en $3x+4y-12=0$

3. Bepaal de vergelijkingen van de bissectrices van de lijnen $4x+3y+8=0$ en $3x+4y-12=0$

4. Bepaal de vergelijkingen van lijnen die een afstand 2 hebben tot de lijn $3x+4y+8=0$

5. Bepaal de vergelijkingen van de beide lijnen door *O* die een afstand 5 hebben tot het punt (1,7)

6. Bepaal de coördinaten van beide punten op de *x*-as die een afstand 2 hebben tot de lijn $6x+8y-13=0$

7. Bereken de coördinaten van de punten op de lijn $x+y=6$ die gelijke afstanden hebben tot $y=2x-1$ en $x+2y=3$

§ 2.4 Lijnenparen

1. $\{(x,y)\,|\,x^2-4y^2=0\}$ bestaat uit twee lijnenparen.

2. $\{(x,y)\,|\,x^2+3xy-4y^2=0\}$ bestaat uit twee lijnenparen.

3. Voor welke waarden van k stelt de vergelijking $\{(x,y)\,|\,x^2-6xy+ky^2=0\}$ twee lijnen voor?

4. Bepaal een vergelijking van het lijnenpaar dat bestaat uit de lijnen $3x+5y=6$ en $x=4$

5. Bepaal de algemene vergelijking van een lijnen paar waarvan de lijnen rc 1 en -1 hebben

§. 2.5 Lijnenbundels

Gegeven is de volgende vergelijking: $2x+3y-5+\lambda(3x+y-4)=0$ met $\lambda\in\mathbb{R}$

Neem λ=0. We vinden dan de lijn met vergelijking $2x+3y-5=0$

Neem λ=1. We vinden dan de lijn met vergelijking $5x+4y-9=0$

Het snijpunt van deze twee lijnen is $S(1,1)$.

- *Ga na dat het punt (1,1) voor alle waarden van λ tot de verzameling behoort.*

Alle lijnen uit bovengenoemde verzameling gaan dus door het punt (1,1) .

Geldt omgekeerd ook dat elke lijn door het punt door het punt (1,1) tot de verzameling behoort?

- *Onderzoek of er een waarde van λ te vinden is voor de lijn met vergelijking $y=7x-6$*
- *Onderzoek of er een waarde van λ te vinden is voor de lijn met vergelijking $y=1$*
- *Onderzoek of er een waarde van λ te vinden is voor de lijn met vergelijking $x=1$*

Hieronder de berekening voor een willekeurige lijn, die door het punt (1,1) gaat: De vergelijking is: $ax+by=a+b$

De vergelijking $2x+3y-5+\lambda(3x+y-4)=0$ met $\lambda\in\mathbb{R}$ is te herschrijven als:

$(2+3\lambda)x+(3+\lambda)y-5-4\lambda=0$

Is er nu een λ te vinden waarvoor de lijnen $(2+3\lambda)x+(3+\lambda)y-5-4\lambda=0$ en $ax+by=a+b$ samenvallen?

In 2.2 zagen we dat dit het geval is als

$$\frac{2+3\lambda}{a}=\frac{3+\lambda}{b}=\frac{5+4\lambda}{a+b}$$

Uit $\frac{2+3\lambda}{a}=\frac{3+\lambda}{b}$ volgt $2b+3\lambda b=3a+a\lambda$. Hieruit λ elimineren geeft $\lambda=\frac{3a-2b}{3b-a}$

Uit $\frac{3+\lambda}{b}=\frac{5+4\lambda}{a+b}$ volgt $3a+3b+\lambda a+\lambda b=5b+4\lambda b$. Hieruit λ elimineren geeft $\lambda=\frac{3a-2b}{3b-a}$

Dus bij gegeven a en b, waarvoor geldt $3b\neq a$ weten we al dat er een λ bestaat.

- *Bespreek de situatie $3b=a\neq 0$.*
- *Hoe zit het met $a=0$ en $b=0$*

$\{(x,y)\,|\,2x+3y-5+\lambda(3x+y-4)=0, \lambda\in\mathbb{R}\}$ noemen we een <u>lijnenbundel</u> met als basisexemplaren $2x+3y-5=0$ en $3x+y-4=0$ en als basispunt (1,1). De lijn $3x+y-4=0$ is de enige lijn door het punt (1,1) die niet tot de bundel behoort.

Als we dit willen ondervangen moeten we de lijnenbundel noteren als:

$\lambda(2x+3y-5)+\mu(3x+y-4)=0$ met $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ Het rekenwerk wordt ingewikkelder , daarom zien we hiervan af. <u>Houd wel altijd rekening met de uitzondering.</u>

Schrijven we voor de vergelijkingen van de basisexemplaren symbolisch $L_1=0$ en $L_2=0$ dan krijgen we de volgende algemene definitie van een lijnenbundel:

Een lijnenbundel is de verzameling lijnen die wordt voorgesteld als: $\lambda L_1+\mu L_2=0$.

- *Ga na dat je en evenwijdige bundel krijgt als de basislijnen evenwijdig zijn.*

Voorbeeld1

De zijden van ΔABC liggen op de lijnen: $2x$-$3y+4$=0, x+$3y$-6=0 en $3x$-$4y$-5=0. Bepaal een vergelijking van de hoogtelijn uit A (A is het snijpunt van de eerste twee lijnen)

Oplossing: elke lijn door het snijpunt A van de eerste twee lijnen behoort tot de bundel:

$2x-3y+4+\lambda(x+3y-6)=0$ of $(2+\lambda)x + (-3+3\lambda)y+(4-6\lambda)=0$

De richtingscoëfficiënt van deze lijn is: $\dfrac{\lambda+2}{3-3\lambda}$.De lijn moet loodrecht staan op: $3x$-$4y$-5=0.

Dit is een lijn met r.c $\frac{3}{4}$

Dus: $\dfrac{\lambda+2}{3-3\lambda}\cdot\frac{3}{4}=-1 \to \lambda=2$

De vergelijking van de bedoelde hoogtelijn is dus: $4x + 3y - 8 = 0$

- *Ga na hoe de oplossing zou verlopen zonder gebruik te maken van een lijnenbundel! Echt even doen, dan zie je het nut van lijnenbundels in.*

Opgaven

1. Bepaal de vergelijking van de lijn die gaat door het punt (-2,5) en het snijpunt van de lijnen x-$5y$=10 en $3x$+$7y$=8

2. De lijnen $y = kx$-1, $y = 4x$-k en $y = 2x$+1 gaan door één punt. Bereken k

3. Bepaal de vergelijking van een lijn , die gaat door het snijpunt van de lijnen $2x$-y-3=0 en $3x$+y+5=0 en evenwijdig is met de lijn $4x$+y+7=0

4. Onderzoek of het lijnenstelsel, dat wordt voorgesteld door de vergelijking $(p-1)x - py + 4 + p^2+10=0$ een lijnenbundel voorstelt.

5. Toon aan dat alle lijnen van het lijnenstelsel $(a+1)x+(2a+3)y = a+4$ door één punt gaan.

6. Gegeven is de lijnenbundel: $(a+2)x+(2a-1)y+3a-4=0$. Bepaal de vergelijkingen van de lijnen van de lijnenbundel die een afstand 1 tot O hebben.

7. Bepaal de vergelijking van de lijn door P(3,4), die gaat door het snijpunt van de lijnen $2x+y$ = 6 en $y = 2x$

8. Bepaal de vergelijking van de lijn door het snijpunt van de lijnen $3x+5y$ = 7 en $x+y$ = 3, die loodrecht staat op $y = 2x$

9. Wat is het basispunt van de lijnenbundel

a. $2x+ky=4-2k$

b.$(a+1)x+y=2a$

10. Het punt (2,4) is het basispunt van de bundel $ax+by-6+\lambda(bx-ay+2)=0$. Bereken a en b.

2.6 Parametervoorstelling van een rechte lijn

We hebben nu een aantal vergelijkingen van lijnen bestudeerd. Hieronder volgt nog een manier om een lijn te noteren: de parametervoorstelling . ***Deze methode wordt vooral veel gebruikt om een willekeurig punt op een lijn weer te geven.***

Voorbeeld: Een willekeurig punt op de lijn $y = 2x+3$ kun je voorstellen als:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda + 3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \ ,$$

maar ook door $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 4\lambda + 3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$, en ook door $\begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = 2\lambda + 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

- *Ga dit na*

Omgekeerd kun je ook een vergelijking van een lijn bepalen als een parametervoorstelling gegeven is.
Voorbeeld:

Gegeven de verzameling $V: \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} x = 3\lambda - 1 \\ y = 2\lambda + 3 \end{matrix} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

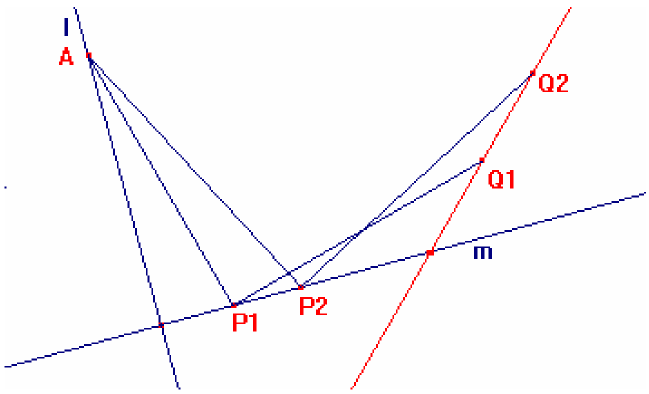
Om hier een vergelijking van te maken zoeken we een betrekking tussen x en y waar λ niet meer in voorkomt.
Het wegwerken van λ kan als volgt:

$$\begin{matrix} x = 3\lambda - 1 \\ y = 2\lambda + 3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 3\lambda = x + 1 \\ 2\lambda = y - 3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 6\lambda = 2x + 2 \\ 6\lambda = 3y - 9 \end{matrix} \Rightarrow 2x + 2 = 3y - 9$$

V is dus de lijn met vergelijking : $3y - 2x = 11$

Het wegwerken van de parameter noemen we "***elimineren***".
Uit bovenstaande parametervoorstelling hebben we dus λ geëlimineerd."

Toepassing:



Gegeven zijn de lijnen *l* en *m* die loodrecht op elkaar staan. *A* is een vast punt op *l*. Kies een willekeurig punt *P* op lijn *m*. Teken door *P* een lijnstuk *PQ* waarvoor geldt: $AP=PQ$ en $AP \perp PQ$

<u>*P* laten we de lijn *m* doorlopen</u>. Een tekening met Cabri doet vermoeden dat de verzameling van de punten *Q* een rechte lijn is.
Bewijs dit.

Oplossing met analytische meetkunde:
Kies een geschikt assenstelsel
De twee loodrechte lijnen *l* en *m* zijn resp. de *y*-as en de *x*-as. *A* is het punt (0,*a*)
$P(\lambda,0)$ en dus $Q(\lambda+a,\ a)$ vanwege congruentie.
Voor het punt *Q* geldt dus

$$\begin{cases} x = \lambda + a \\ y = \lambda \end{cases}$$

Elimineren van λ geeft $y = x-a$. Dit is een rechte lijn.
Voor de liefhebbers volgt hieronder de
Oplossing met meetkunde
Het snijpunt van de lijnen *l* en *m* is *S*. De projectie van *Q* op *m* is *T*.
nu is $\Delta SAP \cong \Delta TPQ \to SP = TQ$ en $SA = PT$
Teken op de lijn m het punt *R* zodat *SA*=*SR*.

$$\left.\begin{matrix} SA = SR \\ SA = PT \end{matrix}\right\} \to SR = PT \to SP + PR = PR + RT \to SP = RT$$

$$\left.\begin{matrix} SP = RT \\ SP = QT \end{matrix}\right\} \to RT = QT$$

Dus $\angle QRT = 45^0$. voor alle punten *Q*. *R* is een vast punt. Dus *Q* opeen lijn door *R* met richtingscoëfficiënt 1.

§ 2.8 Gemengde vraagstukken over lijnen.

Voorbeeld 1
Gegeven zijn de vaste punten *A*(4,0) en *B*(0,2). *L*angs de *x*-as beweegt zich een punt *P* in positieve richting en langs de *y*-as een punt *Q* in positieve richting zodat steeds *AP* = 3*BQ*. De lijn door *P* met richtingscoëfficiënt -1 snijdt de lijn door *Q* met richtingscoëfficiënt 1 in *S*.

- *Gebruik cabri om de verzameling te bepalen van de punten S als P de x-as doorloopt*
- *Bereken de vergelijking van de gevonden verzameling.*

Oplossing:
Het ligt voor de hand om bij het bewegend punt *P* te beginnen en daar de parameter λ in te voeren. Al het andere hangt daarvan af. Dus:

Noem het punt $P(4+3\lambda,0)$. Dan is $Q(0,2+\lambda)$ met $\lambda>0$. Het punt *S* ligt dan op de lijnen:
$y = -(x-(4+3\lambda)$ en $y-(2+\lambda) = x$

Voor de punten *S*(*x*,*y*) geldt dus: $\begin{cases} y = -(x-(4+3\lambda) \\ y-(2+\lambda) = x \end{cases}$

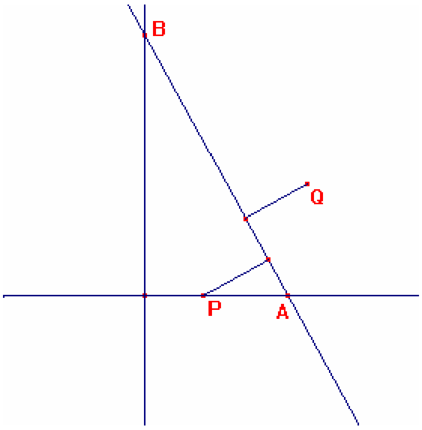
Hieruit λ elimineren geeft de gevraagde verzameling.

$$\begin{cases} 3\lambda = y + x - 4 \\ \lambda = y - x - 2 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3\lambda = y + x - 4 \\ 3\lambda = 3y - 3x - 6 \end{matrix} \to y + x - 4 = 3y - 3x - 6$$

$\to$ de gevraagde verzameling is de lijn $y = 2x + 1$ vanaf het punt (1,3) naar rechts.

Voorbeeld 2: meetkunde met analyse.
Gegeven zijn de punten *P*(1,0) en *Q*(3,2).De punten *P* en *Q* hebben gelijke afstanden tot een lijn *l*, die de positieve *x*-as in het punt *A* en de positieve *y*-as in *B* snijdt.(A en *B* vallen niet samen). De oppervlakte van driehoek *ABO* is minimaal

Stel de vergelijking op van de lijn *l*.



(Oplossing:

We kiezen voor de vergelijking van de lijn:

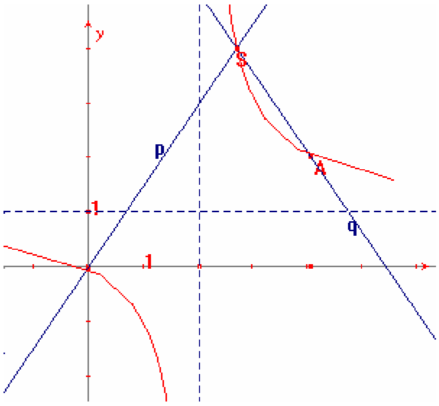
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ dus $bx + ay - ab=0$
Gegeven is: $|b-ab|=|3b+2a-ab|$ $\longrightarrow$
$a = -b$ of $ab-2b-a = 0$. Volgens de gegevens blijft over $ab-2b-a = 0$. Ga dit na.
De opdracht is nu teruggebracht tot: Bereken het minimum van ab onder de voorwaarde:
$ab-2b-a = 0$.

Of :Bereken het minimum van ab onder de voorwaarde: $b=\frac{a}{a-2}$.

$O(a)=\frac{a^2}{a-2}$ Met differentieren vinden we a=4 en dus b=2. De vergelijking van de gevraagde lijn is: $x+2y=4$

Voorbeeld 3

Een lijn *p* draait om de oorsprong en een lijn *q* draait om het punt $A(4,2)$ en wel zo dat steeds de richtingscoëfficiënt van *q* het tegengestelde is van de richtingscoëfficiënt van *p*. Het snijpunt van *p* en *q* is *S*.



a. Bepaal de verzameling van de punten *S* met cabri.
b. Bereken de verzameling van de punten *S*.

Berekening:

De lijn *p* stellen we voor door $y=mx$.
De lijn *q* wordt dan $y-2=-m(x-4)$
Voor de coördinaten (x,y) van punt *S* geldt dus $y=mx$ én $y-2=-m(x-4)$
Hieruit *m* elimineren: $m=\frac{y}{x}$ en $m=\frac{2-y}{x-4}$ en dus voor de coördinaten van punt *S* geldt: $\frac{y}{x}=\frac{2-y}{x-4}\rightarrow y=\frac{x}{x-2}$

Opgaven

1. Gegeven $P(p,0)$ en $Q(0, 2p)$. Het midden van PQ is M.
Bepaal de verzameling van de punten M als p variabel is.

2. Bepaal de verzameling van alle punten die gelijke afstand hebben tot de lijnen $3x-y=17$ en $x-3y=1$
Wat stelt de gevonden verzameling voor?

3. Bepaal de verzameling van alle punten die gelijke afstand hebben tot de lijnen: $3x-y=17$ en $3x-y=1$

Wat stelt de gevonden verzameling voor?

4. Bepaal de verzameling van alle punten die gelijke afstand hebben tot de punten A(1.3) en B(5, 5)
Wat stelt de gevonden verzameling voor?

5. Een lijn p draait om het punt A(3,2). De lijn p snijdt de y-as in S. De lijn q door A loodrecht op de lijn p snijdt de x-as in T. Het midden van ST is M.
a. Bepaal de verzameling van de punten M met Cabri.
b. Bereken een vergelijking van de verzameling van de punten M.

6. Een lijn draait om het punt A(1,1). De lijn snijdt de x-as in P en de y-as in Q. De lijn door P met richtingscoëfficiënt +1 snijdt de lijn door Q met richtingscoëfficiënt -1 in S.
Bepaal de verzameling van alle punten S.

Hoofdstuk 3 Over cirkels.

§ 3.1 De vergelijking van een cirkel

Een cirkel is de verzameling van de punten die een vaste afstand r hebben tot een vast punt M (a,b) Voor elk punt (x,y)op de cirkel geldt dus:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Opgaven

1. Bepaal het middelpunt en de straal van de volgende cirkels:

$$(x-3)^2+(y+5)^2=49$$
$$x^2+y^2=18$$
$$(x+7)^2+y^2=36$$

2. Onderzoek of de volgende vergelijkingen een cirkel voorstellen en zo ja geef dan het middelpunt en de straal.

a. $x^2+y^2-8x-14y+40=0$

b. $x^2+y^2-8x-4y+11=0$

c. $x^2+y^2-4x=0$

d. $2x^2+2y^2-6x=0$

1. Bepaal de vergelijking van de cirkel die gaat door de punten:
(1,1), 2,4) en (5,3)

2. Bepaal de vergelijking van de cirkel met middelpunt (3,2) die gaat door het punt (5,6)

3. Bepaal de vergelijking van de cirkel met middelpunt (3,2) die de x-as raakt.

4. Bereken voor welke waarden van a de volgende vergelijking een cirkel voorstelt:

$$x^2+y^2+ax+16=0$$

5. Toon aan dat de volgende vergelijking voor alle waarden van a een cirkel voorstelt.

$$x^2+y^2-2ax-14y+40=0$$

7. Onderzoek of het punt (3,1) binnen, buiten of op de cirkel ligt met vergelijking:
$x^2 + y^2 - 6x + 6 = 0$

8. Gegeven is de lijn met parametervoorstelling: $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}$

Bereken voor welke waarden van λ de punten van de lijn binnen de cirkel
$x^2 + 4x + y^2 - 6x + 5 = 0$ liggen

9. Bereken de snijpunten van de lijn $y = x + 2$ met de cirkel $x^2 + y^2 = 10$

10. Bereken de snijpunten van de lijn $x + y = 0$ met de cirkel $x^2 + y^2 - 3x + y = 16$

11. Bewijs dat de punten *A*(4,0), *B*(-4,0), *C*(0,8) en *D*(5,3) op één cirkel liggen.

§ 3.2 De raaklijn aan de cirkel.

Eerste geval: de discriminant-methode

Voorbeeld1

Bepaal de raaklijn met r.c 2 die de cirkel $x^2+y^2 = 20$ raakt.

We kunnen voor de vergelijking alvast opschrijven: $y=2x+n$.

We moeten nu *n* zo bepalen dat het stelsel $\begin{cases} y = 2x + n \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ precies één oplossing heeft.

Oplossing: elimineer *y*

We krijgen zo:

$$x^2 + (2x + n)^2 = 20$$

$$5x^2 + 4nx + n^2 - 20 = 0$$

Deze vergelijking heeft een oplossing als D=0

$$16n^2 - 20(n^2 - 20) = 0$$

$$n = \pm 10$$

De vergelijkingen van de gevraagde lijnen zijn dus:

$y = 2x+10$ en $y = 2x-10$

Voorbeeld 2

Bereken de vergelijkingen van de raaklijnen vanuit het punt P(5,0) aan de cirkel met vergelijking $x^2+y^2 = 20$

Omdat de raaklijn door het punt (5, 0) gaat is de vergelijking van deze raaklijn: $y = m(x-5)$

Het stelsel $\begin{cases} y = m(x - 5) \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ moet dus één oplossing hebben

Elimineer *y*

$x^2+(m(x-5))^2=20$

$(1+m^2)x^2-10m^2x+25m^2-20=0$

Deze vergelijking heeft een oplossing als D=0

$100m^4-4(1+m^2)(25m^2-20)=0$

$-20m^2+80=0$

dus $m=2$ of $m=-2$

de gevraagde lijnen zijn: $y=2x-10$ en $y=-2x+10$

De coördinaten van de raakpunten hebben we zo nog niet, maar zijn in dit geval vrij eenvoudig te berekenen. In § 3.3 zullen we een methode leren waarbij we twee vliegen in één klap slaan.

- *Ga na dat bovenstaande methode erg ingewikkeld is bij de volgende opgave: Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen aan de cirkel $x^2+y^2=25$ die door het punt (7,1) gaan. Nog een reden om een handigere methode te bedenken.*

We noemen de methode die we in beide voorbeelden gebruikt hebben de **discriminant-methode**.

Voorbeeld 3
Bereken de vergelijking van de raaklijn in het punt P(4,2) aan de cirkel $x^2+y^2=20$
Omdat de rc $OP=\frac{1}{2}$ moet de rc van de raaklijn -2 zijn.
De vergelijking van de raaklijn is dus: y-2=-2(x-4) , te herleiden tot y+2x=10.
Algemeen:
De raaklijn in een gegeven punt $P(x_1,y_1)$van de cirkel
Stel de cirkel heeft vergelijking $x^2+y^2=r^2$ en het punt op de cirkel is $P(x_1,y_1)$.
Om de vergelijking op te stellen gebruiken we de eigenschap dat een raaklijn loodrecht staat op de straal naar het raakpunt.

de richtingscoëfficiënt van *OP* is $\frac{-x_1}{y_1}$.

De vergelijking van de raaklijn in *P* is dus

$y-y_1=\frac{-x_1}{y_1}(x-x_1)$

Deze vergelijking s te herleiden tot:

$xx_1+yy_1=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}$ en omdat $P(x_1,y_1)$ op de cirkel ligt

$xx_1+yy_1=r^2$

Dus:

de vergelijking van de raaklijn aan de cirkel $x^2+y^2=r^2$ in het punt (x_1,y_1) is:

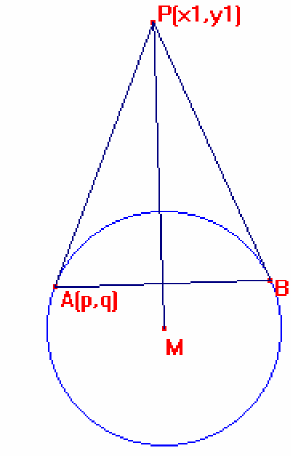
$xx_1+yy_1=r^2$

Opgaven

Bepaal de vergelijking van de raaklijnen aan de cirkel $x^2+y^2=9$ die loodrecht staan op de lijn $3x+4y=1$

§.3.3. De poollijn van een cirkel.

Het punt $P(x_1, y_1)$ ligt buiten de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$. PA en PB zijn de raaklijnen uit P aan de cirkel en $A(p,q)$ is het raakpunt.



De vergelijking van de raaklijn in A is dan: $px + qy = r^2$. Omdat punt P hierop ligt geldt dus: $px_1 + qy_1 = r^2$, zodat we nu weer kunnen zeggen dat A op de lijn $xx_1 + yy_1 = r^2$ ligt. Hetzelfde geldt voor B. De lijn $xx_1 + yy_1 = r^2$ gaat dus door de raakpunten van de raaklijnen uit P aan de cirkel. Deze lijn heet de **poollijn** van P t.o.v. de cirkel. en P heet de **pool**

Voorbeeld

We gaan nog eens terug naar het voorbeeld in 3.2

Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen aan de cirkel $x^2+ y^2=25$ die door het punt (7,1) gaan.

Met de poollijn gaat de oplossing als volgt:

De raakpunten liggen op de cirkel en de poollijn. Los dus op het volgende stelsel:

$$\begin{cases} 7x + y = 25 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

y elimineren geeft:

$$x^2 + (25 - 7x)^2 = 25$$

$$50x^2 - 350x + 600 = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x-3)(x-4) = 0$$

dus $x = 3$ of $x = 4$

De raakpunten zijn dus (3,4) en (4,-3)

De raaklijnen zijn: $3x+4y=25$ en $4x-3y=25$

Opgaven

1. Bewijs dat de poollijn van P t.o.v. de cirkel loodrecht staat op PM

2. Bepaal de algemene verg. van de poollijn van $P(x_1, y_1)$ t.o.v. de cirkel met vergelijking: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

3. Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen uit P(0,6) aan de cirkel $x^2 + y^2 = 4x + 4$

4. Bepaal de pool van de lijn $y = 2x + 3$ t.o.v. de cirkel $x^2 + y^2 = 6x$

5. Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen uit $(a,2a)$ aan de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$

6. Stel de algemene vergelijking op van de cirkel die de x-as en de lijn $y = \frac{4}{3}x$ raakt

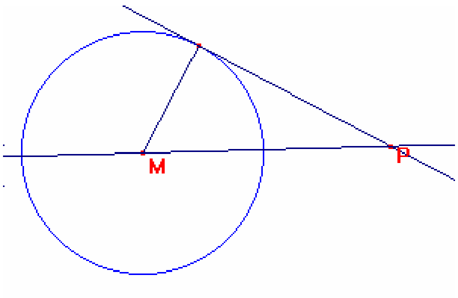
7. Stel de algemene vergelijking op van de cirkel die de lijn $y = 2x$ raakt in het punt (2,2)

§.3.4 De macht van een punt t.o.v. een cirkel en de machtlijn van twee cirkels.

Men noemt $PM^2 - r^2$ de macht P t.o.v. $\odot(M, r)$

Als het punt *P* buiten de cirkel ligt dan is de macht van *P* t.o.v. de cirkel precies de lengte van het raaklijnstuk vanuit *P* aan de cirkel.

- Ga dit na.



Als $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ de vergelijking van de cirkel is dan is de macht van *P* t.o.v. de cirkel:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2$

- Ga dit na

Opgaven

1. Bepaal de vergelijking van de cirkel met middelpunt (4,3) die de cirkel met vergelijking $(x-3)^2 + y^2 = 5$ loodrecht snijdt

2. Bewijs dat de cirkels $(x-3)^2 + y^2 = 5$ en $x^2 + y^2 = 2y + 4$ elkaar loodrecht snijden.

3. Bepaal het punt op de x-as , dat gelijke machten heeft t.o.v. de cirkels $x^2 + y^2 = 9$ en $(x-5)^2 + y^2 = 14$

4. Bepaal op de lijn $y = x + 2$ het punt dat gelijke machten heeft t.o.v. de cirkels $(x-3)^2 + y^2 = 5$ en $x^2 + y^2 = 2y + 4$

5. Bepaal de verzameling van de punten waarvan de macht t.o.v $(x-3)^2 + y^2 = 5$ gelijk is aan 11.

6. Bewijs dat er geen punt is dat gelijke machten heeft t.o.v. twee concentrische cirkels.

§. 3.5 Cirkelbundels

De cirkels met algemene vergelijkingen

$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$ en $x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$

bepalen een bundel

Schrijven we voor de vergelijkingen van de basisexemplaren symbolisch C_1=0 en C_2=0 dan krijgen we de volgende algemene definitie van een cirkelbundel:

Een cirkelbundel is de verzameling cirkels die wordt voorgesteld als:

$\lambda C_1 + \mu C_2 = 0$.

Analoog aan § 2.4 blijkt; elke cirkel uit de bundel gaat door de snijpunten van C_1=0 en C_2=0 (***de basispunten***)

De lijn met vergelijking C_1-C_2=0 heet ***de as*** van de bundel en gaat door de basispunten.
De as is de machtlijn van elk tweetal cirkels uit de bundel
Zijn A en B de basispunten dan ligt het middelpunt van elke cirkel van de bundel op de middelloodlijn van AB.

- *Bewijs dit.*

De middelpunten van de cirkel van een bundel liggen dus op een lijn. Deze lijn heet de ***centraal*** van de bundel.

- *Geldt het omgekeerde ook?*

"Als de middelpunten van een stelsel cirkels op één lijn liggen dan is dat stelsel een cirkelbundel?"

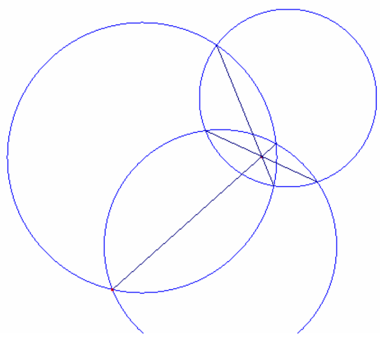
Kiest men de centraal van de bundel als X-as en de as als Y-as , dan is de vergelijking van de cirkelbundel: $(x-a)^2 + y^2 = a^2+p$ (a variabel). De basispunten zijn dan $(0, \sqrt{p})$ en $(0, -\sqrt{p})$

- *Ga dit na.*

Voorbeeld1
Bepaal de vergelijking van de cirkel die gaat door het punt (2,1) en door de snijpunten van de cirkels
$x^2+y^2-6x-4y-1=0$ en $x^2+y^2-2x-5=0$
De gevraagde cirkel behoort tot de bundel:
$x^2+y^2-6x-4y-1+\lambda(x^2+y^2-2x-5)=0$
Het punt (2,1) ligt hierop als geldt: λ=-2 en hiermee is de vergelijking van de gevraagde cirkel bekend:
$x^2+y^2+2x+4y-9=0$

- *Ga eens na hoe het rekenwerk verloopt zonder gebruik te maken van cirkelbundels.*

Voorbeeld 2
Als drie cirkels elkaar twee aan twee snijden dan gaan de drie gemeenschappelijke koorden door een punt.



Bewijs:
Stel de vergelijkingen van de cirkels zijn:
$C_1 = x^2+y^2+ax+by+c=0$
$C_2 = x^2+y^2+dx+ey+f=0$
$C_3 = x^2+y^2+gx+hy+k=0$
De gemeenschappelijke koorde van C_1 en C_2 is dan:
$(a-d)x+(b-e)y+c-f=0$ of $C_1-C_2=0$
De gemeenschappelijke koorde van c_1 en c_3 is dan:
$(a-g)x+(b-h)y+c-k=0$ of $C_1-C_3=0$
Alle lijnen door het snijpunt van deze koorden behoren tot de bundel:
$(a-g)x+(b-h)y+c-k+\lambda((a-d)x+(b-e)y+c-f)=0$
of
Alle lijnen door het snijpunt van deze koorden behoren tot de bundel:
C_1-C_2+λ(C_1-C_3)=0

De gemeenschappelijke koorde van C_3 en C_2 is:
$(d-g)x+(e-h)y+f-k=0$ of $C_2 - C_3 = 0$. Voor λ=-1 behoort deze lijn tot de bundel. Dus de drie koorden gaan door een punt.

Voorbeeld 3
De poollijnen van een punt P t.o.v. alle cirkels van een bundel vormen een lijnenbundel.
Bewijs:
We kiezen voor de gemakkelijkste voorstelling van een cirkelbundel:
$(x-a)^2 + y^2 = a^2+p$ (a variabel)
De poollijn van een punt $P(x_0, y_0)$ t.o.v. een cirkel van de lijnenbundel heeft als vergelijking: $(x_0-a)(x-a) + y_0y = a^2+p$ (a variabel)
Deze uitdrukking is te herschrijven als:
$x_0x+ y_0y +a(-x-x_0-p)=0$ met a variabel. Dit is een lijnenbundel.

Opgaven

1. Bereken de snijpunten van de cirkels met vergelijking
$x^2+y^2=6x-6$ en $x^2+y^2=4y-12$

2. Bepaal de vergelijking van de cirkel door O en de snijpunten van de cirkels $x^2 +y^2 = 6x-6$ en $x^2 + y^2 = 4y-12$.

3. Bepaal de vergelijking van de cirkel , die de y-as raakt en gaat door de snijpunten van $x^2 +y^2 =24$ en $x^2 + y^2 -9x+12=0$

4. Toon aan: Als twee cirkels buiten elkaar liggen dan geldt voor elk punt P op de machtlijn dat de raaklijnstukken vanuit dat punt aan alle cirkels uit de bundel waarvan de beide gegeven cirkel de basisexemplaren zijn, even lang zijn.

5. Bepaal de vergelijking van de cirkel met middelpunt op de lijn $x=y$ die alle cirkels van de bundel loodrecht snijdt.

6. Bepaal de vergelijking van de cirkel waarvan het middelpunt op de y-as ligt en die de cirkel $x^2 + y^2 = 6x+1$ in (2, 3) raakt.

7. Bepaal de vergelijking van de beide cirkels met straal $\sqrt{10}$, die de cirkel $x^2+y^2=10$ in (1,3) loodrecht snijden.

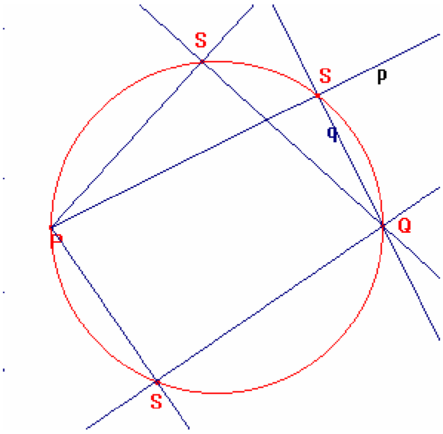
Hoofdstuk 4 Verzamelingen bepalen.

§ 4.1 Verzameling bepalen door eliminatie van de parameters.

Voorbeeld 1
Gegeven zijn twee vaste punten P en Q. Teken door P een lijn p. Teken door Q de lijn q loodrecht op p. S is het snijpunt van p en q.
Bepaal de verzameling van de punten S
a) met cabri
b) met vlakke meetkunde

c) met analytische meetkunde.

a)



b) Bewijs bekend uit de vlakke meetkunde.

c)

Het is duidelijk dat de lijn *p* variabel is. We gaan dus een assenstelsel vast leggen met P als oorsprong en *PQ* als horizontale as en de lijn door *P* loodrecht op *PQ* als verticale as en de helft van *PQ* als eenheid.

De lijn p heeft dan als vergelijking: $y = mx$, *m* variabel

De lijn *q* gaat door het punt (2,0) en heeft als r.c $\frac{-1}{m}$ De vergelijking is dus: $y=\frac{-1}{m}(x-2)$

Voor het snijpunt *S* geldt: $\left\{(x,y)\middle| \begin{matrix} y = mx \\ y=\frac{-1}{m}(x-2)\end{matrix}\right\}$ Zolang de variabele *m* erin zit kunnen we niets zeggen over *S*. We moeten *m* elimineren.

$$m=\frac{y}{x} \to y=\frac{-1}{\frac{y}{x}}(x-2) \to y=-\frac{x}{y}(x-2) \to y^2+x^2-2x=0$$

$$\to (x-1)^2+y^2=1$$

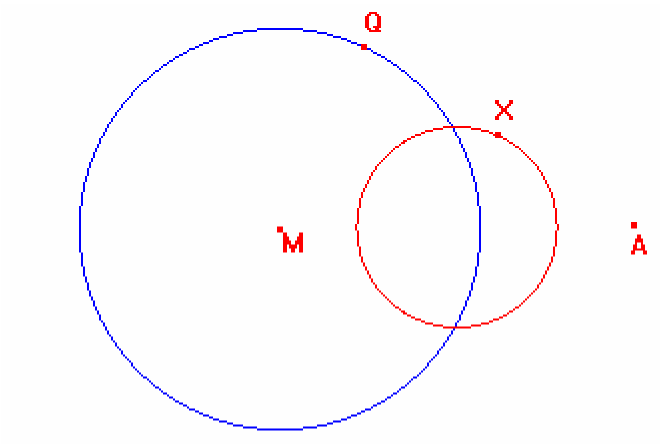
Dit is een cirkel met als middellijn *PQ*.

Voorbeeld 2:

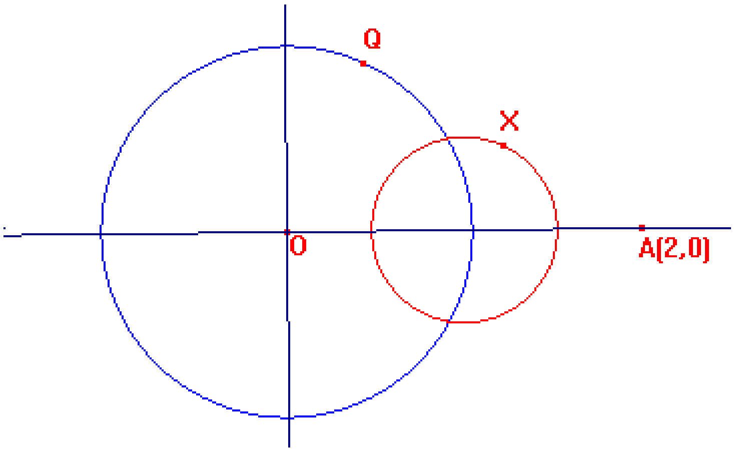
Gegeven is een cirkel met middelpunt *M* en een punt *A* buiten deze cirkel. en een punt *P* op de cirkel.

a. Bepaal de verzameling van de middens van het lijnstuk *AP* met Cabri.

b. Bepaal de verzameling met analytische meetkunde.



We zien dat de gevraagde verzameling een cirkel wordt.
b.Breng een assenstelsel aan zodat $P(\cos t, \sin t)$ en A(2,0) Dat kan altijd als er nog geen



assenstelsel gegeven is.

c. Dus gevraagd naar

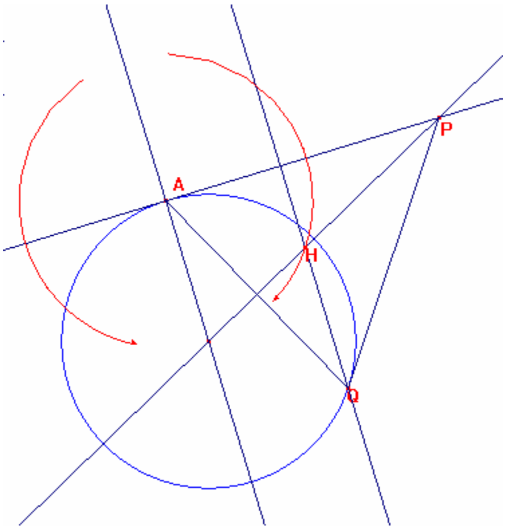
$$\left\{ M((x,y) \left| \begin{array}{c} x = \dfrac{\cos t + 2}{2} \\ y = \dfrac{\sin t}{2} \end{array} \right. \right\}$$. Om hieruit t te elimineren hebben we nog een derde betrekking nodig:

$$\left\{ M((x,y) \left| \begin{array}{c} x = \dfrac{\cos t + 2}{2} \\ y = \dfrac{\sin t}{2} \\ \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \end{array} \right. \right\}$$ te herleiden tot $\left\{ M((x,y) \left| \begin{array}{c} \cos t = 2x - 2 \\ \sin t = 2y \\ \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \end{array} \right. \right\}$ en hieruit volgt :

$(2x-2)^2+(2y)^2=1$ en dit is de vergelijking van een cirkel.

.

Voorbeeld 3
Gegeven is een cirkel en daarop punt *A*
Een punt *P* beweegt zich langs de raaklijn in het punt *A* aan de cirkel. De tweede raaklijn vanuit *P* aan de cirkel raakt de cirkel in *Q*. Het hoogtepunt van ΔABC is *H*.



Bepaal de verzameling van de punten *H*.

Met cabri zien we dat de verzameling een cirkel is met middelpunt *A* door het middelpunt van de gegeven cirkel.
Kies een assenstelsel zó dat de gegeven cirkel de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ heeft en $A(0,1)$
$P(\lambda,1)$ en Q op $\lambda x + y = 1($ poollijn$)$

De hoogtelijn uit P heeft als vergelijking: $y = \frac{1}{\lambda}x$

Q op $\lambda x + y = 1$ en op $x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x_Q = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$

Voor de *H(x,y) geldt dus:*

$$\begin{cases} x = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \\ y = \frac{1}{\lambda}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \\ \lambda = \frac{x}{y} \end{cases} \rightarrow x = \frac{2\frac{x}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \rightarrow x^2 + y^2 = 2y$$

- *Ga na of je het punt (0,0) mee moet tellen.*
- *Ga na of dit ook meetkundig te bewijzen is.*

4.2.1 Verzameling bepalen met de directe methode

Voorbeeld 1
Bepaal de verzameling van de punten die gelijke aftand hebben tot de punten *A*(3,5) en *B*(7, -1)
Stel (*x*,*y*) is zo'n punt. Dan geldt dus:
$\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+1)^2}$
Hieruit volgt de vergelijking: $2x - 3y = 4$
De verzameling is dus een rechte lijn. **Deze lijn noemen we de middelloodlijn van *A* en *B*.**

Voorbeeld 2
Gegeven zijn de evenwijdige lijnen $p: 3x + 4y = 6$ en $q: 3x + 4y = 8$
Bepaal de verzameling van de punten *P* die gelijke afstand hebben tot de lijnen *p* en *q*.
Stel $P(x_P,y_P)$ is zo'n punt

Dan geldt: $\dfrac{|3x_P + 4y_P - 6|}{5} = \dfrac{|3x_P + 4y_P - 8|}{5}$ en hieruit volgt de vergelijking $3x_P + 4y_P - 7 = 0$.
Alle punten $P(x_P,y_P)$ liggen dus op de rechte lijn met vergelijking:
$3x + 4y - 7 = 0$. **Deze lijn noemen we de *middenparallel* van *p* en *q*.**

Gemengde opgaven

1. Gegeven zijn de cirkels met vergelijking; $(x-4)^2 + y^2 = p$. Vanuit O trekt men de raaklijnen aan de cirkels. Bepaal de verzameling van de raakpunten.

2. Bepaal de verzameling van de punten die gelijke machten hebben t.o.v. de cirkels $x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$ en $x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Deze verzameling heet de **machtlijn** van de twee cirkels.

3. Gegeven de punten A(-2a,0) en B(a,0). $V = \{P \mid d(PA) = 2(P,B)\}$

a Bepaal V eerst met cabri
b. Bereken V

4. Gegeven zijn de punten $A(2,0)$, $B(-2,0)$ en $C(0,6)$. Bewijs dat de verzameling van de punten P waarvoor geldt $PA^2+PB^2+PC^2=k^2$ een cirkel is met het zwaartepunt van ΔABC als middelpunt.

5. Bepaal de verzameling van de punten waarvan de som der machten t.o.v. $x^2 + y^2 = a^2$ en $x^2 + y^2 = 2ax$ gelijk is aan $3a^2$

6. Bepaal de vergelijkingen van deellijnen van de lijnen $y = 2x$ en $2x + 4y = 7$

7. Op een cirkel ligt een vast punt A De raaklijn in een punt P aan de cirkel snijdt de raaklijn in A aan de cirkel in het punt Q. H is het hoogtepunt is van ΔAPQ
Bepaal de verzameling van de punten H als P de cirkel doorloopt.

8. Op de positieve x-as kiest men een punt P en op de positieve y-as het punt Q zodat $OP + OQ = 2a$ Het midden van PQ is M. Bepaal de verzameling van de punten M.

9. Gegeven is de cirkel $x^2 + y^2 + 2ay = 0$. Men neemt een punt A op de lijn $x + a = 0$ en een punt B op de x-as waarvan de x-coördinaat gelijk is aan de y- coördinaat van A. De raaklijnen uit B aan de cirkel raken de cirkel in O en P.

a. Laat met Cabri zien dat de punten A, O, en P op één lijn liggen
b. Bewijs met vlakke meetkunde dat de punten A, O, en P op één lijn liggen
c. Bewijs met analytische meetkunde dat de punten A, O, en P op één lijn liggen en bepaal een vergelijking van de lijn.

10. De lijn $y = \mu x$ raakt de cirkel $x^2 + y^2 - 4x + \lambda = 0$

a. Druk λ in μ uit
b. Aan welke voorwaarde voldoet λ, als $x^2 + y^2 - 4x + \lambda = 0$ een cirkel voorstelt en er een μ bestaat zo, dat $y = \mu x$ de cirkel raakt
c. Wat is de verzameling van de raakpunten , als μ variabel is.

11. Gegeven is de cirkel $x^2 + y^2 - 14x - 8y + 40 = 0$

Deze cirkel snijdt de *x*-as in *A* en *B*. *P* is een willekeurig punt van de cirkel

a. Bepaal de verzameling van de zwaartepunten van de driehoeken *ABP* als *P* de cirkel doorloopt.

b. Bereken de coördinaten van het middelpunten de straal van de gevonden cirkel.

12. Gegeven zijn de punten *A*(-9,0), *B*(15,0) en *C*(0,15).

a. Bereken de coördinaten van het hoogtepunt *H*, het middelpunt *M* ven de omgeschreven cirkel en het zwaartepunt *Z* van ΔABC.

b. Bewijs dat de punten *H*, *M* en *Z* op één lijn liggen.

13. Gegeven zijn het punt *A*(-2*a*,0), de lijn *l* met vergelijking $x = \frac{1}{2}a$ en de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ Hierin is $a \neq 0$. Neem een willekeurig punt *P* op *l*. De poollijn van *P* t.o.v. de gegeven cirkel snijdt de lijn *AP* in *S*

Bepaal de verzameling van de punten *S* als *P* de lijn *l* doorloopt

Hoofdstuk 5 Diversen

§ 5.1 Over raaklijnen

Voor de raaklijn in een punt aan een cirkel, parabool, ellips en hyperbool hebben we formules afgeleid.
Er is ook een <u>algemene methode</u> om vergelijkingen van raaklijnen in een punt op een kromme te maken. In deze paragraaf bespreken we deze methode.
We moeten hiervoor bedenken dat achter elke vergelijkingeen parametervoorstelling schuilt.
Bijvoorbeeld:

$\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 6t - 5 \end{cases}$ is een parametervoorstelling van de lijn met vergelijking: $y = 3x\text{-}5$

$\begin{cases} x(t) = 2t^2 \\ y(t) = 4t \end{cases}$ is een parametervoorstelling van de parabool: $y^2 = 8x$

$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{cases}$ is een parametervoorstelling van de ellips : $9x^2+4y^2=36$

Stel nu dat je de raaklijn in het punt (1,1) moet hebben aan de kromme met vergelijking :
$x^2+xy+2y^2 = 4$
Bedenk dat achter deze vergelijking de volgende parametervoorstelling schuilgaat:

$\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$

Dan geldt: $f^2(t) + f(t)\cdot g(t) + 2g^2(t) = 4$.

Deze uitdrukking differentieren geeft (denk aan de kettingregel en aan de productregel):

$$2f'(t)f(t) + f'(t)\cdot g(t) + f(t)\cdot g'(t) + 4g'(t)\cdot g(t) = 0 \rightarrow$$

$$2\frac{dx}{dt}x + \frac{dx}{dt}\cdot y + x\cdot\frac{dy}{dt} + 4\frac{dy}{dt}\cdot y = 0 \rightarrow$$

$$(2x+y)\frac{dx}{dt} = -(x+4y)\frac{dy}{dt} \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{-x-4y}$$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in (1,1) is dus: $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{5}$ en de vergelijking van de raaklijn: $y - 1 = -\frac{3}{5}(x-1)$,te herleiden tot $5y+3x=8$

Afspraak:
Nu hoef je in het vervolg niet meer expliciet te werken met de functies $f(t)$ en $g(t)$.
Het rekenwerk ziet er eenvoudig als volgt uit:

$x^2+xy+2y^2 = 4$ differentieren geeft: $2xdx+xdy+ydx+4ydy=0$ en dus ook $(2x+y)dx = -(x+4y)dy$.
En hieruit volgt dan weer: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{-x-4y}$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in (1,1) is dus: $\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{5}$ en de vergelijking van de raaklijn: $y-1=-\frac{3}{5}(x-1)$,te herleiden tot $5y+3x=8$

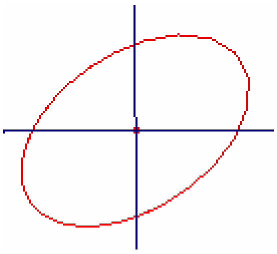
Voorbeeld

Gegeven is de cirkel met vergelijking: $x^2+2x+y^2=24$. Stel een vergelijking op van de raaklijn in het punt (2,4) aan de cirkel.

Oplossing: $2xdx+2dx+2ydy=0 \rightarrow (2x+2)dx=-2ydy \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x+2}{-2y}$

In (2,4) is dus: $\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{4}$ en de vergelijking van de raaklijn: $y-4=-\frac{3}{4}(x-2) \rightarrow 4y+3x=22$

§ 5.2 Algemene vergelijking van een kegelsnede

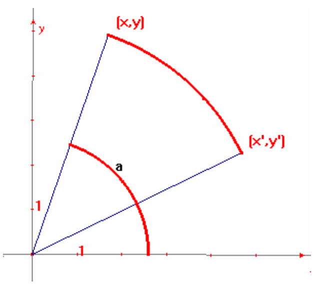


Als we de kromme met vergelijking $5x^2$-$2xy$+$5y^2$=12 in een rechthoekig assenstelsel tekenen, krijgen we het vermoeden dat de getekende kromme een ellips is en wel een ellips gedraaid over 45^0. In deze paragraaf bestuderen we de transformatie formules voor draaiingen.

Stel we draaien de gegeven kromme over 45^0 met de klok mee.

Er geldt dan: $x=\cos a\cdot\sqrt{x^2+y^2}$ en $y=\sin a\cdot\sqrt{x^2+y^2}$

Voor de nieuwe coordinaten (x',y') geldt dan



$$x'=\cos(\tfrac{1}{4}\pi-a)\sqrt{x^2+y^2}=(x+y)\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$y'=\sin(\tfrac{1}{4}\pi-a)\sqrt{x^2+y^2}=(y-x)\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

De x en y oplossen uit dit stelsel geeft:

$x=(x'-y')\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ en $y=(y'+x')\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$

Nu deze coördinaten invullen in de gegeven vergelijking:

$5((x'-y')\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2$-$2(x'-y')\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot(y'+x')\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$+$5((y'+x')\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2=12$ en na een stevige rekenpartij :$2x^2$+$3y^2$ = 6 **en dit is een ellips.**

Met behulp van draaiingen kunnen we aantonen dat de krommen met vergelijkingen va de vorm: $ax^2+bx+cy^2+dy+fxy+k=0$ kegelsneden voorstellen voor bepaalde waarden van de coëfficiënten.

§ 5.3 Uitbreiding verzamelingen bepalen.

Opgave 1

Gegeven is het stelsel parabolen met vergelijking $y^2 - 2px - 2py + 4p^2 = 0$ waarin p variabel.

a) Bereken de verzameling toppen van de parabolen van dit stelsel
b) Voor welke waarden van p gaat de parabool door het punt (6,4)
c) Wat is de verzameling van de punten waardoor één parabool van het stelsel gaat.
d) Door welke punten gaat geen enkele parabol van het stelsel? Teken en arceer het gevonden gebied.

Oplossing

a) Herschrijf de gegeven vergelijking tot: $(y-p)^2 = 2p(x - \frac{3}{2}p)$

Voor de toppen geldt:

$\begin{cases} x = \frac{3}{2}p \\ y = p \end{cases}$ Hieruit p elimineren geeft: $x = \frac{3}{2}y \rightarrow 2x - 3y = 0,$ een lijn door de oorsprong.

b) Vul het punt in de vergelijking $y^2 - 2px - 2py + 4p^2 = 0$. Dan komt er p^2-5p+4=0

Dus p=4 of p=1

c) Herschrijf de gegeven vergelijking tot: $4p^2 - (2x + 2y)p + y^2 = 0$ en beschouw deze als een vierkantsvergelijking in p

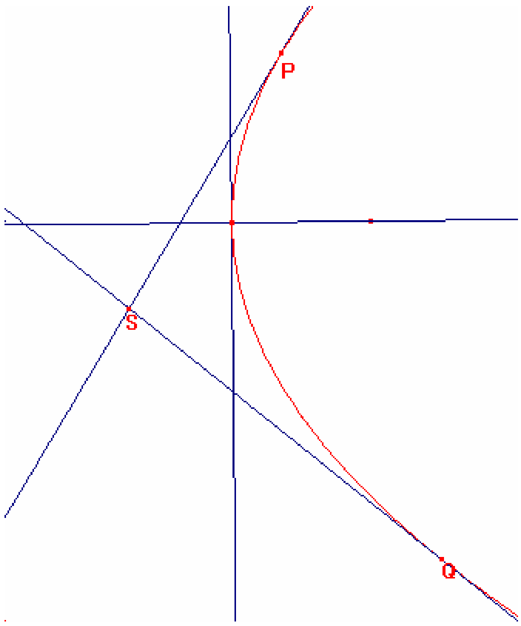
Hier komt één waarde voor p uit als D=0.

$\rightarrow (2x+2y)^2 - 16y^2 = 0 \rightarrow x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \rightarrow (x+3y)(x-y) = 0$

Dit is een lijnenpaar.

d) Geen enkele parabool: $(x+3y)(x-y)$<0. Teken eerst de lijnen : x=-3y en x=y . Je weel dat (6,4) niet in het goede gebied ligt.

Opgave 2



Op de parabool $y^2 = 4x$ liggen twee punten P en Q zo, dat y_Q= - 2y_P. De raaklijnen in P en Q aan de parabool snijden elkaar in S.

Bepaal de verzameling van de punten S als P de parabool doorloopt.

Oplossing: Stel $P(\lambda,\mu)$

$$x_Q = \frac{y_Q^2}{4} = \frac{4\mu^2}{4} = \mu^2$$

Stel de raaklijnen op in $P(\frac{\mu^2}{4}, \mu)$ en $Q(\mu^2, -2\mu)$.

Voor S geldt dan:

$$\begin{cases} y(-2\mu) = 2(x+\mu^2) \\ y\mu = 2(x + \frac{1}{4}\mu^2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2y\mu = 2x + 2\mu^2 \\ 2y\mu = 4x + \mu^2 \end{cases}$$

$$6x = -3\mu^2 \rightarrow 2x = -\mu^2 \wedge y = -\tfrac{1}{2}\mu$$

Hieruit μ elimineren geeft voor de verzameling van de punten S: $y^2 = -\frac{1}{2}x$

Opgave 3.
P is een willekeurig punt van de orthogonale hyperbool *xy* = 4
De cirkel , die *P* als middelpunt heeft en door *O* gaat , snijdt de asymptoten van de hyperbool behalve in *O* nog in de punten *A* en *B*.
Bewijs dat de lijn *AB* de hyperbool in *P* raakt.

Oplossing: Stel $P(\lambda,\mu)$, dan weten we $\lambda\mu = 4$ en de vergelijking van de cirkel is dan:
$x^2 - 2\lambda x + y^2 - 2\mu y = 0$. Hieruit volgt $A(2\lambda,0)$ en $B(0,2\mu)$ en de lijn *AB* $y = \frac{-\mu}{\lambda}(x - 2\lambda)$

We moeten dan x en y oplossen uit het volgende stelsel:

$$\begin{cases} xy = 4 \\ \lambda\mu = 4 \\ y = \dfrac{-\mu}{\lambda}(x-2\lambda) \end{cases} \quad \text{Hieruit volgt: } \begin{cases} \lambda\mu = 4 \\ x(\dfrac{-\mu}{\lambda}(x-2\lambda)) = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda\mu = 4 \\ \mu x^2 - 8x + 4\lambda = 0 \end{cases}$$

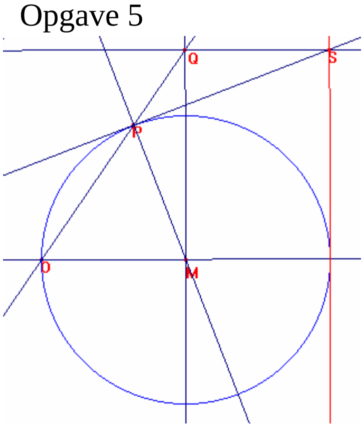
De discriminant van de vierkantsvergelijking is 0 want: $D = 64 - 16\lambda\mu = 64 - 16\cdot 4 = 0$ De snijpunten vallen dus samen en door substitutie zie je eenvoudig dat *P* het snijpunt is.

Opgave 4
Gegeven is de hyperbool $x^2 - y^2 = 9$. De cirkel die door (7,0) gaat en de *Y*-as in de oorsprong raakt snijdt de hyperbool in *A* en *B*.
Bewijs dat het zwaartepunt van Δ*OAB* op de hyperbool ligt.
Aanpak: vanwege de symmetrie ligt het zwaartepunt van Δ*OAB* op de *x*-as en moet dus wel de top van de hyperbool zijn.

Los dus *x* op uit het stelsel: $\begin{cases} x^2 - 7x + y^2 = 0 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases} \rightarrow 2x^2 - 7x - 9 = 0 \rightarrow x = 4\tfrac{1}{2}$

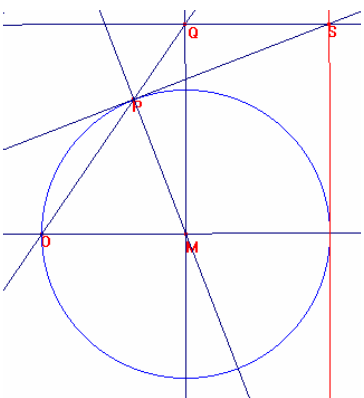
En dus is het zwaartepunt van Δ*OAB* het punt (3,0), een top van de hyperbool.

Opgave 5



Gegeven is een cirkel met middelpunt *M*. Door een vast punt *O* op de cirkel trekt men twee lijnen: de lijn *OM* en een lijn *OP*, waarbij *P* een punt op de cirkel is. De lijn door *M* loodrecht op *OM* snijdt *OP* in *Q*. De lijn door *Q* evenwijdig aan *OM* snijdt de raaklijn in *P* aan de cirkel in *S*. Bepaal de verzameling van de punten *S* als *P* de cirkel doorloopt.

a) Met Cabri. W e zien dat de verzameling een rechte lijn wordt.
b) Met meetkunde.???



c) Met analytische meetkunde.
We kiezen de *x*-as door *OM* en de *y*-as de lijn door *M* loodrecht op *OM*, en de eenheden zó dat de cirkel de vergelijking: $x^2 + y^2 = 1$ krijgt.

Stel $P(\cos\varphi, \sin\varphi)$ Dan is de lijn *OP*: $y = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi + 1}(x+1)$. De coördinaten van *Q* zijn dan. $\left(0, \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi+1}\right)$ De raaklijn in *P* heeft vergelijking: $\cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y = 1$

Om de verzameling van de punten *S* te berekenen moeten we φ elimineren uit het volgende stelsel:

$$\begin{cases} y = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi+1} \\ \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi+1} \\ \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y = 1 \end{cases} \rightarrow \cos\varphi \cdot x + \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi+1} = 1 \rightarrow \cos\varphi \cdot x + \frac{1-\cos^2\varphi}{\cos\varphi+1} = 1$$

$$\rightarrow \cos\varphi \cdot x + \frac{(1+\cos\varphi)(1-\cos\varphi)}{\cos\varphi+1} = 1 \rightarrow \cos\varphi(x-1) = 0 \rightarrow x = 1$$

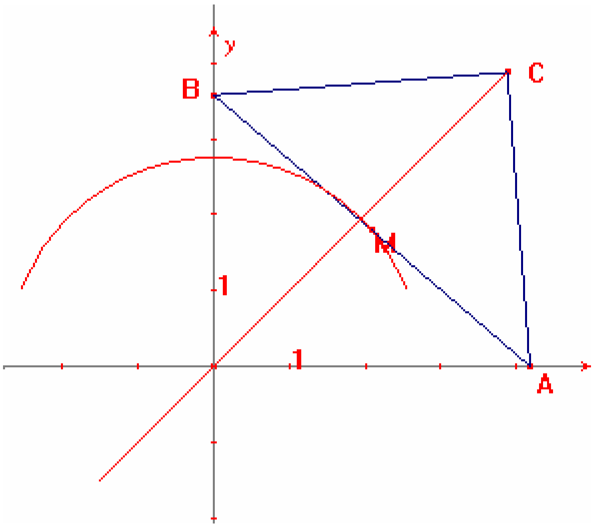
We moeten wel nog onderzoeken wat er met cos φ = -1 aan de hand is.
De verzameling is dus een rechte lijn.

Opgave 5
In een rechthoekig assenstelsel liggen de punten *A*, *B*, *C* als volgt:
A ligt op de *x*-as , *B* op de *y*-as . Driehoek *ABC* is een gelijkbenige rechthoekige driehoek met de rechte hoek in *C.*
M is het midden van *AB.*

a) Construeer met cabri de verzameling van de punten als *A* de *x*-as doorloopt.
b) Bewijs dat deze verzameling een cirkel is.
c) Construeer met cabri de verzameling van de punten *C* als *A* de *x*-as doorloopt.
d) Bewijs dat deze verzameling de bissectrice is van hoek *AOB*

b) We mogen de gelijke zijden van de driehoek als eenheid nemen. Dan *AB*=2.
Stel *A*(*a*,0) en B(0,*b*). We weten dan $a^2 + b^2 = 2$ en -2≤ *a* ≤2.
oor geldt dan:. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}a \\ y = \frac{1}{2}b \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = a \\ 2y = b \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow (2x)^2 + (2y)^2 = 2$.

en dit is een cirkel met middelpunt (0,0) en straal $\frac{1}{2}\sqrt{2}$



c) Voor het punt geldt dat CA=CB=1

Dus we moeten a en b elimineren uit de volgende betrekkingen.

$$\begin{cases} (x-a)^2+y^2=1 \\ x^2+(y-b)^2=1 \\ a^2+b^2=2 \end{cases}$$ Uitwerken en vierkantsvergelijking oplossen.

$$\begin{cases} a^2-2ax+x^2+y^2-1=0 \to a=x\pm\sqrt{1-y^2} \\ b^2-2by+x^2+y^2-1=0 \to b=y\pm\sqrt{1-x^2} \\ a^2+b^2=2 \end{cases}$$

$$\left(x\pm\sqrt{1-y^2}\right)^2+\left(y\pm\sqrt{1-x^2}\right)^2=2 \to x^2+1-y^2\pm 2y\sqrt{1-y^2}+y^2+1-x^2\pm 2x\sqrt{1-x^2}=2$$

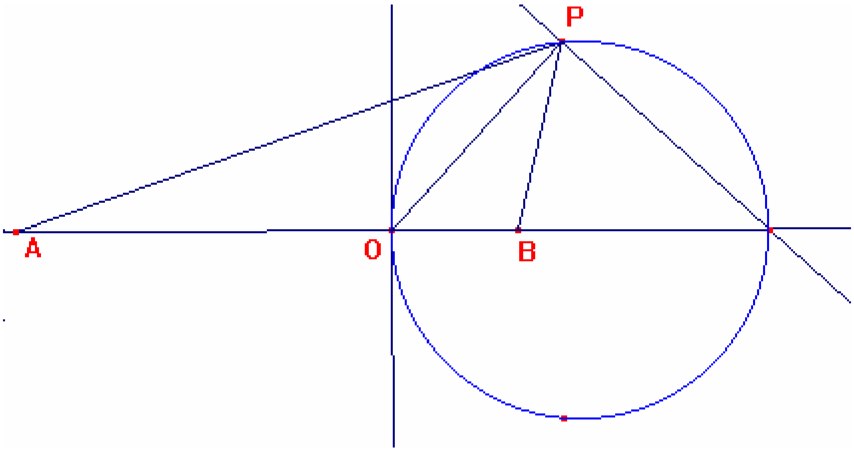
$$\to\left(2y\sqrt{1-y^2}\right)^2=\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)^2 \to x^2=y^2$$

De verzameling bestaat dus uit twee lijnstukken op de lijnen $x = y$ en $x = -y$

Opgave 6

Huisarts A gaat altijd met de auto naar zijn patienten. Huisart B gaat op de fiets naar zijn patienten.
De afstand tussen de woningen van A en B is 12 km.
Neem aan dat A altijd 45 km / uur rijdt en B 15 km/uur. Onderzoek welke arts de patienten bij een spoedgeval het beste kunnen laten komen. Verdeel hiertoe het platte vlak in twee gebieden, het ene dat bij A hoort en het andere gebied dat bij B hoort.

Oplossing: De grens is een conflictlijn. Dit is $\{P \mid d(P,A)=3d(P,B)\}$ Het gebied dat bij B hoort is het binnengebied van een cirkel. Het bewijs met vlakke meetkunde is moeilijk.



Met analytische meetkunde eenvoudig.
Kies een assenstelsel. De x-as door A en B. De y-as zó dat $A(-9,0)$ en $B(3,0)$
Voor $P(x,y)$ geldt dan:

$$\sqrt{(x+9)^2+y^2}=3\sqrt{(x-3)^2+y^2} \rightarrow$$

$$x^2+18x+81+y^2=9x^2-54x+81+9y^2 \rightarrow$$

$$x^2-9x+y^2=0$$

Dit is een cirkel.